TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ - LUẬT
KHOA TOÁN KINH TẾ

Chương 1. Biến cố ngẫu nhiên và xác suất

Thành phố Hồ Chí Minh, 2020

Nội dung

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là hành động, thí nghiệm hoặc quá trình dẫn đến một trong những kết quả có thể xảy ra, không thể đoán trước được mặc dù biết **tập hợp tất cả** các kết quả có thể xảy ra.

Ví dụ minh họa

Phép thử: Chọn một sản phẩm ngẫu nhiên trong lô hàng mới sản xuất, xem có **đạt tiêu chuẩn chất lượng hay không**?

Tập hợp các kết quả: "đạt" hoặc "không đạt".

1. Phép thử ngẫu nhiên

Ví dụ minh họa

Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một sinh viên Đại học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh để đánh giá **kết quả học tập** của sinh viên đó trong khóa học Lý thuyết xác suất.

Tập hợp các kết quả: "yếu", "trung bình", "khá", "giỏi".

1. Phép thử ngẫu nhiên

Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là *không gian mẫu*, ký hiệu là Ω.

Ví dụ minh họa

Trong phép thử "chọn ngẫu nhiên một số nguyên tố bé hơn 10".

Không gian mẫu bao gồm các phần tử $\Omega = \{2, 3, 5, 7\}$.

1. Phép thử ngẫu nhiên

Biến cố

Mỗi kết quả của một không gian mẫu được gọi là một **biến cố sơ cấp**.

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phân loại các biến cố

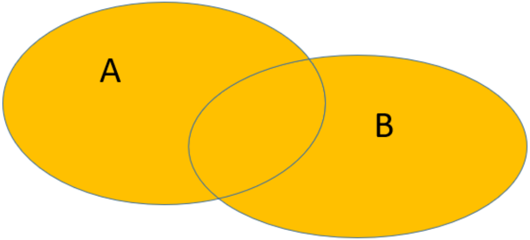
- **Biến cố rỗng**: là biến cố không bao giờ xảy ra trong phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- **Biến cố chắc chắn**: là biến cố luôn luôn xảy ra trong phép thử.
- **Biến cố ngẫu nhiên**: là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện một phép thử.

1. Phép thử ngẫu nhiên

Một số phép toán giữa các biến cố

Giả sử A, B, C và A_i, với $i \in \mathbb{N}$ là các biến cố từ một phép thử ngẫu nhiên cho trước.

Biến cố tổng của hai biến cố A và B ký hiệu $A \cup B$ hay $A + B$, là biến cố xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A **hoặc** B xảy ra.

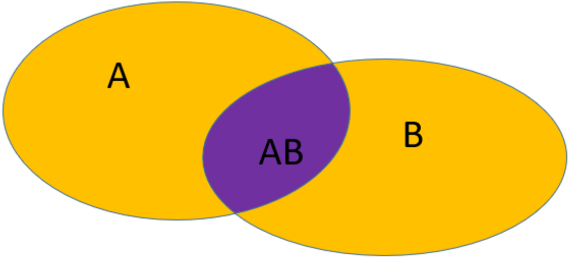


1. Phép thử ngẫu nhiên

Một số phép toán giữa các biến cố

Giả sử A, B, C và A_i, với $i \in \mathbb{N}$ là các biến cố từ một phép thử ngẫu nhiên cho trước.

Biến cố tích của hai biến cố A và B ký hiệu $A \cap B$ hay $A.B$ là biến cố xảy ra khi A và B **đồng thời** xảy ra.

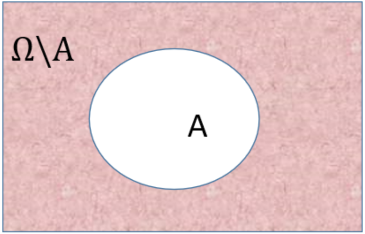


1. Phép thử ngẫu nhiên

Một số phép toán giữa các biến cố

Giả sử A, B, C và A_i, với $i \in \mathbb{N}$ là các biến cố từ một phép thử ngẫu nhiên cho trước.

Biến cố bù (biến cố đối lập), ký hiệu: $\overline{A} = \Omega \setminus A$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

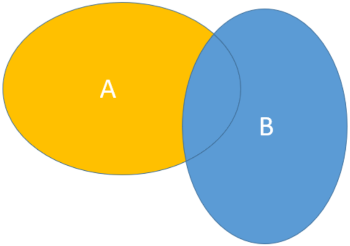


1. Phép thử ngẫu nhiên

Một số phép toán giữa các biến cố

Giả sử A, B, C và A_i, với $i \in \mathbb{N}$ là các biến cố từ một phép thử ngẫu nhiên cho trước.

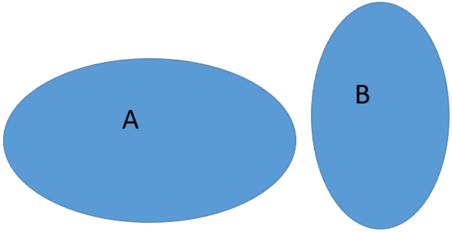
Biến cố hiệu của hai biến cố A và B , ký hiệu $A \backslash B$: là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra và B không xảy ra.



1. Phép thử ngẫu nhiên

Quan hệ giữa các biến cố

Biến cố xung khắc: Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu hai biến cố này **không đồng thời** xảy ra, nói cách khác A và B là xung khắc khi và chỉ khi $AB = \varnothing$.



1. Phép thử ngẫu nhiên

Định nghĩa (Hệ đầy đủ các biến cố)

Hệ các biến cố $\{A_i, 1 \leq i \leq n\}$ được gọi là **hệ đầy đủ** nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Các biến cố xung khắc từng đôi một, nghĩa là $A_i A_j = \varnothing$ với $1 \leq i, j \leq n$ và $i \neq j$.
- Tổng của các biến cố là biến cố chắc chắn:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$$

1. Phép thử ngẫu nhiên

Nhận xét

Hệ $\overline{A}, A$ là một hệ đầy đủ gồm hai biến cố.

Quy tắc đối ngẫu De Morgan

$$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$$

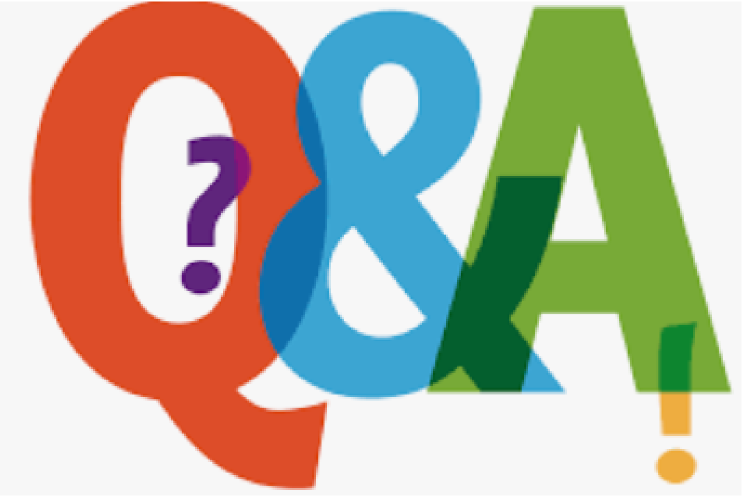
$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

1. Phép thử ngẫu nhiên

Quy tắc đối ngẫu De Morgan mở rộng

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$


Q&A

2. Các định nghĩa xác suất

Theo quan điểm cổ điển

- Số khả năng xảy ra biến cố A là k
- Số phần tử của không gian mẫu Ω là n

$\Rightarrow$ Xác suất xảy ra biến cố A là:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

2. Các định nghĩa xác suất

Theo quan điểm cổ điển

Ví dụ minh họa

Xác suất xuất hiện mặt sấp khi tung 1 đồng xu là bao nhiêu?

Giải:

- Biến cố xuất hiện mặt sấp $A = \{S\}$
- Không gian mẫu $\Omega = \{S, N\}$
- Xác suất xuất hiện biến cố A là

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

2. Các định nghĩa xác suất

Theo quan điểm thống kê - tần suất

2. Các định nghĩa xác suất

Nguyên lý xác suất nhỏ, xác suất lớn

- Nguyên lý xác suất nhỏ: Nếu một biến cố có xác suất rất nhỏ thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra.
- Nguyên lý xác suất lớn: Nếu một biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất lớn (gần bằng 1) thì thực tế có thể cho rằng biến cố đó chắc chắn xảy ra trong phép thử.

3. Công thức tính xác suất

Công thức cộng xác suất

Cho hai biến cố A, B.
Công thức **cộng xác suất** được tính theo công thức:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1}$$

3. Công thức tính xác suất

Công thức cộng xác suất

Ví dụ minh họa

Bạn An đi chơi ở Suối Tiên thì gặp cửa hàng tiện lợi. Biết xác suất để bạn ấy mua kem trong cửa hàng là 0.5, xác suất bạn ấy mua nước suối là 0.4 và xác suất để bạn ấy cả kem và nước suối là 0.1. Hỏi, xác suất bạn ấy mua ít nhất một trong hai món nước suối và kem là bao nhiêu?

3. Công thức tính xác suất
Công thức cộng xác suất

- Đặt N, K lần lượt là biến cố bạn An mua nước suối, kem.
- Khi đó ta có $P(N) = 0.4, P(K) = 0.5, P(NK) = 0.1.$
- Do đó, xác suất bạn ấy mua ít nhất một trong hai món nước suối và kem là:

$$P(N + K) = P(N) + P(K) - P(NK) = 0.4 + 0.5 - 0.1 = 0.8$$

3. Công thức tính xác suất

Công thức cộng xác suất

Khi A và B xung khắc, nghĩa là $AB = A \cap B = \varnothing$ thì công thức **cộng xác suất** có dạng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

3. Công thức tính xác suất
Công thức cộng xác suất

Cho ba biến cố A, B, C. Ta có công thức **cộng ba biến cố**:

$$\begin{aligned} P(A+B+C) = {} & P(A)+P(B)+P(C) \\ & - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ & + P(ABC). \end{aligned} \tag{2}$$

3. Công thức tính xác suất

Công thức cộng xác suất

Khi A, B và C **xung khắc từng đôi**, công thức (2) trở thành:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

3. Công thức tính xác suất

Công thức cộng xác suất

Ví dụ minh họa

Người ta phỏng vấn 100 nữ khách hàng thì thấy có 40 người thích dùng nước hoa loại A, 28 người thích dùng nước hoa loại B, 10 người thích dùng cả 2 loại nước hoa trên. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong số 100 người trên.

a. Tính xác suất để nữ khách hàng đó thích ít nhất một loại nước hoa.

b. Tính xác suất để nữ khách hàng đó không thích bất cứ một loại nước hoa nào.

3. Công thức tính xác suất

Công thức cộng xác suất

a. Đặt A, B lần lượt là các biến cố chỉ nữ khách hàng được chọn thích loại nước hoa A, B. Khi đó, biến cố nữ khách hàng được chọn đó thích ít nhất 1 loại nước hoa chính là $A+B$. Áp dụng công thức cộng hai biến cố ta có:

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{40}{100} + \frac{28}{100} - \frac{10}{100} \\ &= \frac{58}{100} \end{aligned}$$

3. Công thức tính xác suất
Công thức cộng xác suất

b. Ta có, biến cố nữ khách hàng được chọn không thích bất cứ loại nước hoa nào là: $\overline{A+B}$. Áp dụng định nghĩa biến cố đối lập ta tính được:

$$\begin{aligned} P(\overline{A+B}) &= 1 - P(A+B) \\ &= 1 - \frac{58}{100} \\ &= \frac{42}{100}. \end{aligned}$$

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Định nghĩa (Xác suất có điều kiện)

Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra $(P(B) > 0)$, ký hiệu $P(A|B)$ được tính theo công thức:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Nhận xét

Tương tự, **xác suất của biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra** là:

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}.$$

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Ví dụ minh họa

Một tổ học tập môn Lý thuyết xác suất có 7 nam, 3 nữ. Giáo sư muốn chọn 2 sinh viên ngẫu nhiên để thực hiện 1 dự án nghiên cứu. Xác suất để sinh viên thứ hai được chọn là nữ biết rằng sinh viên đầu tiên được chọn là nữ.

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Đặt F_i là biến cố "lần thứ i chọn được sinh viên nữ" ($i = 1, 2$).

Cách 1

Nếu lần thứ đầu tiên chọn được sinh viên nữ (biến cố F_1 đã xảy ra), tổ học tập lúc này chỉ còn 9 sinh viên, trong đó có 2 sinh viên nữ. Do đó, xác suất để sinh viên thứ hai được chọn là nữ sau khi chọn được người đầu tiên là nữ là:

$$P(F_2|F_1) = \frac{2}{9}$$

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Cách 2

Ta có, $P(F_1F_2)$ là xác suất chọn được cả 2 sinh viên là nữ nên:

$$P(F_1F_2) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}.$$

Đồng thời, từ giả thiết ta có:

$$P(F_1) = \frac{3}{10}.$$

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Do đó, theo công thức xác suất điều kiện ta có:

$$P(F_2|F_1) = \frac{P(F_1F_2)}{P(F_1)} = \frac{\dfrac{1}{15}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{2}{9}.$$

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Từ Định nghĩa xác suất có điều kiện, ta suy ra được công thức **nhân xác suất** dưới đây.

- **Nhân hai biến cố:** Cho 2 biến cố A và B. Khi đó:

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad \text{hoặc} \quad P(BA) = P(A)P(B|A)$$

- **Nhân ba biến cố:** Cho 3 biến cố A, B, C. Khi đó:

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

- **Nhân n biến cố:** Cho n biến cố $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Khi đó:

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

Ví dụ minh họa

Một tổ học tập môn Lý thuyết xác suất có 7 nam, 3 nữ. Giáo sư muốn chọn 2 sinh viên ngẫu nhiên để thực hiện 1 dự án nghiên cứu. Xác suất để 2 sinh viên được chọn đều là nữ.

- Đặt F_i là biến cố "lần thứ i chọn được sinh viên nữ" $(i = 1, 2)$.
- Nếu lần thứ đầu tiên chọn được sinh viên nữ (biến cố F_1 đã xảy ra) thì tổ học tập lúc này chỉ còn 9 sinh viên, trong đó có 2 sinh viên nữ.

,

3. Công thức tính xác suất
Xác suất có điều kiện - Công thức nhân xác suất

- Do đó, xác suất để sinh viên thứ hai được chọn là nữ sau khi chọn được người đầu tiên là nữ là:

$$P(F_2|F_1) = \frac{2}{9}$$

- Khi đó, xác suất chọn được cả 2 sinh viên là nữ là:

$$P(F_2F_1) = P(F_1)P(F_2|F_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

3. Công thức tính xác suất
Biến cố độc lập

Định nghĩa (Biến cố độc lập)

Hai biến cố A, B được gọi là độc lập nếu:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{hoặc} \quad P(B|A) = P(B)$$

Nhận xét

Hai biến cố A và B độc lập khi và chỉ khi:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

3. Công thức tính xác suất
Biến cố độc lập

Ví dụ minh họa

Tung một con xúc xắc sáu mặt, cân đối, đồng chất hai lần riêng biệt. Đặt A, B lần lượt là biến cố lần thứ nhất, lần thứ hai gieo được mặt sáu chấm. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập.

3. Công thức tính xác suất
Công thức xác suất đầy đủ - Công thức xác suất Bayes

Cho $\{A_i, 1 \leq i \leq n\}$ là một hệ đầy đủ, B là một biến cố tùy ý. Khi đó ta có **công thức xác suất đầy đủ** sau:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$

3. Công thức tính xác suất

Công thức xác suất đầy đủ - Công thức xác suất Bayes

Ví dụ minh họa

Ở tỉnh A, trong năm 2019, người ta thống kê thấy có 80% người dân đi khám sức khoẻ định kì, còn 20% còn lại không khám sức khoẻ định kì. Trong số những người đi khám sức khoẻ định kì, số người không có vấn đề về sức khoẻ ở năm kế tiếp chiếm 35%, còn đối với những người không đi khám sức khoẻ định kì, con số này là 5%. Chọn ngẫu nhiên một người ở tỉnh A. Tính xác suất người đó không có vấn đề về sức khoẻ ở năm kế tiếp?

3. Công thức tính xác suất
Công thức xác suất đầy đủ - Công thức xác suất Bayes

Đặt A_1 là biến cố người được chọn ngẫu nhiên có khám sức khoẻ định kì, A_2 là biến cố người đó không khám sức khoẻ định kì. Đồng thời, đặt B là biến cố người đó không có vấn đề về sức khoẻ ở năm kế tiếp.

$$P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.2, P(B|A_1) = 0.35, P(B|A_2) = 0.05$$

3. Công thức tính xác suất
Công thức xác suất đầy đủ - Công thức xác suất Bayes

Do A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \\ &= 0.8 \times 0.35 + 0.2 \times 0.05 \\ &= 0.29 \end{aligned}$$

Vậy, xác suất để người đó không có vấn đề về sức khoẻ trong năm kế tiếp là 0.29.

3. Công thức tính xác suất
Công thức xác suất đầy đủ - Công thức xác suất Bayes

Định lý (Công thức Bayes)

Cho $\{A_i, i = \overline{1, n}\}$ *là một hệ đầy đủ, B là một biến cố tuỳ ý sao cho* $P(B) > 0$. *Khi đó,* công thức Bayes *được xác định như sau:*

$$P(A_k|B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad k = \overline{1, n}$$

3. Công thức tính xác suất
Công thức xác suất đầy đủ - Công thức xác suất Bayes

Ví dụ minh họa

Trong ví dụ trước, giả sử nếu ta chọn ra ngẫu nhiên một người ở thành phố đó.
Biết rằng người được chọn không có vấn đề về sức khoẻ trong năm kế tiếp, hỏi xác suất người đó không đi khám sức khoẻ định kì là bao nhiêu?

3. Công thức tính xác suất
Công thức xác suất đầy đủ - Công thức xác suất Bayes

Khi đó, ta cần tính xác suất $P(A_2|B)$.

Áp dụng công thức Bayes ta có:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.05 \times 0.2}{0.29} = 0.0345$$

4. Công thức Bernoulli

Định nghĩa (Phép thử Bernoulli)

Cho phép thử T trong đó chỉ có hai kết quả có thể xảy ra là biến cố A xảy ra hoặc không xảy ra.
Phép thử T được gọi là **phép thử Bernoulli**.

Ví dụ minh họa

Gieo một đồng xu 100 lần, kết quả ở từng lần gieo là sấp hoặc ngửa (không phải sấp). Do đó, đây là 100 phép thử Bernoulli.

4. Công thức Bernoulli

Định nghĩa (Công thức Bernoulli)

Giả sử ta thực hiện phép thử Bernoulli T trong n lần độc lập nhau và xác suất biến cố A xảy ra trong mỗi lần thử đều là p. Khi đó, xác suất biến cố A xảy ra đúng k lần trong n lần thử, ký hiệu là $P_n(k)$, $k = \overline{1, n}$, được tính bởi công thức:

$$P_n(k, A) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

trong đó $q = 1 - p$.

Công thức này được gọi là **công thức Bernoulli**.

4. Công thức Bernoulli

Xác suất biến cố A xảy ra từ k_1 đến k_2 lần trong n lần thực hiện phép thử Bernoulli, ký hiệu $P_n(k_1 \to k_2, A)$ bằng công thức sau:

$$P_n(k_1 \to k_2, A) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

trong đó: $q = 1 - p = P(\overline{A})$ và $0 \leq k_1, k_2 \leq n$

4. Công thức Bernoulli

Ví dụ minh họa

Một xạ thủ bắn 6 viên đạn vào bia, xác suất trúng hồng tâm của mỗi viên đạn đều là 0.7.

a. Tìm xác suất có đúng 3 viên trúng hồng tâm?

b. Tìm xác suất có ít nhất 3 viên trúng hồng tâm?

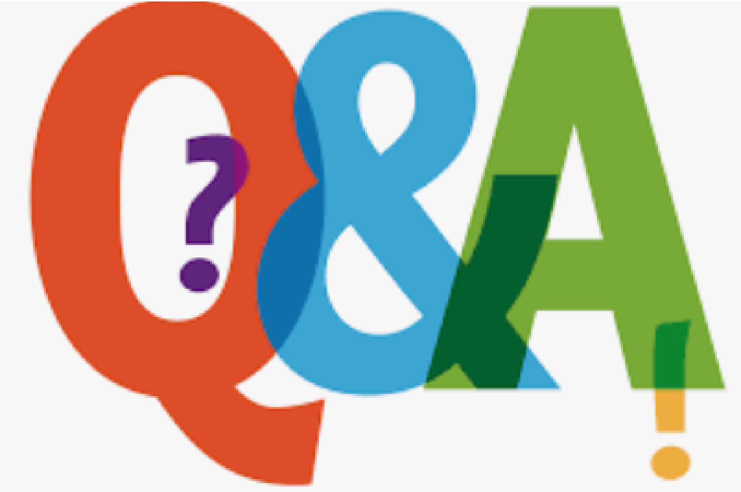
4. Công thức Bernoulli

a. Đặt A là biến cố viên đạn trúng hồng tâm, vì mỗi lần bắn độc lập và đều có xác suất trúng là 0.7 nên áp dụng công thức Bernoulli ta được:

$$P_6(3, A) = C_6^3(0.7)^3(0.3)^3 = 0.1852$$

b. Xác suất để có ít nhất 3 viên đạn trúng hồng tâm là:

$$P_6(3 \to 6, A) = \sum_{k=3}^{6} C_6^k(0.7)^k(0.3)^{6-k} = 0.9295$$


Q&A
?
!